

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

ZW 1951 - 015

Berekening van een integraal

H.J.A. Duparc en C.G. Lekkerkerker



1951

# Berekening van een integraal.

H.J.A. Duparc en C.G. Lekkerkerker.

Zij gevraagd te berekenen de integraal:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it\zeta}}{(1-2ait)^{\frac{k}{2}}(1-2bit)^{\frac{l}{2}}} dt \quad (0 < \zeta < \infty; a, b \neq 0; a < b; k, l \text{ natuurlijke getallen}).$$

We onderstellen voorlopig:  $k, l = 3$ . De substitutie  $t \rightarrow it$  levert:

$$I = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{t\zeta}}{(1+2at)^{\frac{3}{2}}(1+2bt)^{\frac{3}{2}}} dt.$$

Allereerst is:

$$\int_0^{\infty} e^{-s\zeta} \zeta^{\alpha-1} d\zeta = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}} \quad (\operatorname{Re} s > 0)$$

$$\text{dus } \frac{1}{(1+2at)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^{\infty} e^{-(1+2at)\zeta} \zeta^{\frac{3}{2}-1} d\zeta \quad (t \text{ zuiver imaginair})$$

$$= \frac{(2a)^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^{\infty} e^{-t\zeta} e^{-\frac{\zeta}{2a}} \zeta^{\frac{3}{2}-1} d\zeta.$$

$$\text{We stellen } \varphi(t) = \frac{1}{(1+2at)^{\frac{3}{2}}}; \quad \psi(t) = \frac{1}{(1+2bt)^{\frac{3}{2}}};$$

$$f(\zeta) = \frac{(2a)^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} e^{-\frac{\zeta}{2a}} \zeta^{\frac{3}{2}-1}; \quad g(\zeta) = \frac{(2b)^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} e^{-\frac{\zeta}{2b}} \zeta^{\frac{3}{2}-1}$$

dan is  $\varphi(t)$  de Laplace-getransformeerde van  $f(\zeta)$ .

Evenzo is  $\psi(t)$  de Laplace-getransformeerde van  $g(\zeta)$ .

Inversie-die hier zeker geoorloofd is-levert:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\zeta t} \varphi(t) dt; \quad g(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\zeta t} \psi(t) dt.$$

We berekenen nu de gevraagde integraal m.b.v. de convolutie van de functies

$f(\zeta)$  en  $g(\zeta)$ ; zie D.V. Widder, Laplace Transform, p. 91-92. Er geldt

$$\varphi(t) \psi(t) = \int_0^{\infty} e^{-t\zeta} h(\zeta) d\zeta \quad \text{met } h(\zeta) = \int_0^{\zeta} f(x)g(\zeta-x)dx.$$

Uit deze formule volgt:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zt} \varphi(t) \psi(t) dt,$$

dus

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zt} \varphi(t) \psi(t) dt = 2\pi h(z) \\ &= 2\pi \frac{(2a)^{-\frac{k}{2}} (2b)^{-\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}) \Gamma(\frac{l}{2})} \int_0^z e^{-\frac{x}{2a} - \frac{z-x}{2b}} x^{\frac{k}{2}-1} (z-x)^{\frac{l}{2}-1} dx. \end{aligned}$$

Substitutie van  $z = \xi u$

levert:

$$\mathcal{Y} = A \int_0^1 e^{cu} u^{\frac{k}{2}-1} (1-u)^{\frac{l}{2}-1} du$$

met  $\xi \equiv$

$$A = 2\pi \frac{(2a)^{-\frac{k}{2}} (2b)^{-\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}) \Gamma(\frac{l}{2})} e^{-\frac{\xi}{2b}} \xi^{\frac{k}{2} + \frac{l}{2} - 1}, \quad c = \xi \left( \frac{1}{2b} - \frac{1}{2a} \right).$$

Het gaat dus om de berekening van

Ontwikkeling van  $e^{cu}$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 e^{cu} u^{\frac{k}{2}-1} (1-u)^{\frac{l}{2}-1} du \\ &\stackrel{\text{geeft}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cu)^n}{n!} u^{\frac{k}{2}-1} (1-u)^{\frac{l}{2}-1} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \int_0^1 u^{n+\frac{k}{2}-1} (1-u)^{\frac{l}{2}-1} du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} B\left(n+\frac{k}{2}, \frac{l}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \frac{\Gamma(n+\frac{k}{2}) \Gamma(\frac{l}{2})}{\Gamma(n+\frac{k}{2}+\frac{l}{2})}. \end{aligned}$$

Nu wordt in Whittaker-Watson, Modern Analysis de volgende confluyente hypergeometrische functie ingevoerd ( $2^e$  ed. p. 332):

$$M_{\lambda, \mu}(x) = x^{\frac{1}{2}+\mu} e^{-\frac{1}{2}x} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{2}+\mu-\lambda}{1 \cdot (2\mu+1)} x + \frac{(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)(\frac{3}{2}+\mu-\lambda)}{2! (2\mu+1)(2\mu+2)} x^2 + \dots \right\}$$

$$= x^{\frac{1}{2}+\mu} e^{-\frac{1}{2}x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}+\mu-\lambda) \Gamma(2\mu+1)}{n! \Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda) \Gamma(2\mu+n+1)} x^n = \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)} x^{\frac{1}{2}+\mu} e^{-\frac{1}{2}x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}+\mu-\lambda)}{n! \Gamma(n+2\mu+1)} x^n.$$

In ons geval is:

$$\frac{k}{2} = \frac{1}{2} + \mu - \lambda; \quad \frac{k}{2} + \frac{l}{2} = 1 + 2\mu; \quad c = x$$

Dus  $\mu = \frac{k+l-2}{4}; \quad \lambda = \frac{l-k}{4};$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \frac{A \Gamma(\frac{l}{2}) \Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k+l}{2})} c^{-\frac{k+l}{4}} e^{\frac{c}{2}} M_{\frac{l-k}{4}, \frac{k+l-2}{4}}(c) \\ &= \frac{\pi(\frac{\xi}{2})^{\frac{k+l}{4}} e^{-\frac{\xi}{4}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}}{a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{l}{2}} \Gamma(\frac{k+l}{2}) (\frac{1}{b} - \frac{1}{a})^{\frac{k+l}{4}}} M_{\frac{l-k}{4}, \frac{k+l-2}{4}}\left(\frac{\xi}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\right). \end{aligned}$$

In het geval  $k=l$  is de integraal uit te drukken als een Besselfunctie met zuiver imaginair argument, en wel n.b.v. de formule (vergelijk Whittaker-Watson) 2<sup>e</sup> ed. p. 352

$$J_{\mu}(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2^{2\mu+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}(\mu+\frac{1}{2})\pi i} \Gamma(\mu+1)} M_{0,\mu}(2ix).$$

We vinden dan:

$$x = \frac{\xi}{4i} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right); \quad x^{-\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{\xi}{4} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}}; \quad \mu = \frac{k-1}{2};$$

$$e^{\frac{1}{2}(\mu+\frac{1}{2})\pi i} = e^{\frac{k}{4}\pi i},$$

aus dan is

$$J = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2}) \pi 2^{k-1} \left( \frac{\xi}{2} \right)^{\frac{k-1}{2}} e^{-\frac{\xi}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}}{(ab)^{\frac{k}{2}} (k-1)! \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)^{\frac{k-1}{2}}} e^{(k-1)\frac{\pi i}{4}} J_{\frac{k-1}{2}} \left( \frac{\xi}{4i} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \right),$$

$$= \frac{\pi \sqrt{\pi} \left( \frac{\xi}{2} \right)^{\frac{k-1}{2}} e^{-\frac{\xi}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}}{\sqrt{ab} \Gamma(\frac{k}{2}) (a-b)^{\frac{k-1}{2}}} e^{(k-1)\frac{\pi i}{4}} J_{\frac{k-1}{2}} \left( \frac{\xi}{4i} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \right),$$

waarbij gebruik gemaakt is van de verdubbings formule der  $\Gamma$ -functie

Uiteindelijk vinden wij dan voor het geval  $k=l$

$$J = \frac{\pi \sqrt{\pi}}{\sqrt{ab}} \frac{e^{-\frac{\xi}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \left( \frac{\xi}{2(b-a)} \right)^{\frac{k-1}{2}} I_{\frac{k-1}{2}} \left( \frac{\xi}{4} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right).$$